第 8 章 一般関数型モデルの比較静学分析

市東 亘
shito@seinan-gu.ac.jp

2020 年 6 月 25 日

本章の目的

- 微分と弾力性の違いを理解する．
- 全微分を学ぶ．
- 陰関数と陰関数定理を理解する．
- 全微分を用いて陰関数の偏微分を求める方法を学ぶ．

動機． $y = f(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ から $\partial y/\partial x_0$ を求める時，$x_1,\ x_n,\ \ldots,\ x_n$ は一定と見なす．$x_1,\ x_n,\ \ldots,\ x_n$ が x_0 から独立ならば，$x_1,\ x_n,\ \ldots,\ x_n$ を固定することによって差分係数を導出して $\Delta x_0 \to 0$ の極限をとることによって偏微係数を求めることが出来るが，独立ではない場合どのようにして偏微係数を求めるのだろうか？

（例）

$$\left.\begin{array}{l} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = C(Y,\ T_0) \end{array}\right\} \quad Y = C(Y,\ T_0) + I_0 + G_0$$

この解は $Y^* = Y(I_0,\ T_0,\ G_0)$ となるはず．このとき $\partial Y^*/\partial T_0$ をどのように求めるか？

上の 2 式から均衡解を求めると，$Y^* = C(\underset{\sim}{Y^*},\ T_0) + I_0 + G_0$

$$\uparrow$$

この Y^* も $T_0,\ I_0,\ G_0$ に依存．

となり reduced form（誘導形）で $Y^* = f(\text{パラメータ})$ のように明示的に（陽関数で）書き表せない！

$$\Downarrow$$

C の中の Y も含め，全ての変化率を測る全微分を考えてやればよい．

1 微分 (differential)

(1) 微分と導関数

$y = f(x)$ の導関数 dy/dx を 2 つの量 dy と dx の比率と見なす.

差分のケース: $\Delta y \equiv$ ______________

微分のケース: $dy \equiv$ ______________ $\equiv$ ______________ x の変化量が微少な時.

dy: y の微分 (the differential of y)
dx: x の微分 (the differential of x)

dy や dx を求めることも「微分」(differentiation) と呼ぶ.

(2) 今まで「微分」を dy/dx という導関数を求めることと同義に使ってきた. 導関数を求める「微分 differentiation」と x や y の微小変化である微分 (differential) を求める「微分 differentiation」を区別するために，dy/dx を求めることを「x に関する微分 (differentiation respect to x)」または「y の x に関する微分」と呼ぶ.

(3) 微分と誤差

(4) 微分と点弾力性
微分係数が 2 つの微分 dy と dx の比率であると考えると，弾力性の定義を微分係数を用いて表すことが出来る．

定義. $y = f(x)$ の弾力性: x が 1%変化したら y は何%変化するかを表す．

$x \longrightarrow x + dx$ 変化率は，____________

$y \longrightarrow y + dy$ 変化率は，____________

x，1%当たり，y が何%変化するかを ε とおくと，

$\varepsilon \equiv$

（注）弾力性は変化量が同じでも評価する点で値が異なる．

$x \to x + dx$ で $1 \xrightarrow{+1} 2$ なら________ %の増加．

$100 \xrightarrow{+1} 101$ なら________ %の増加．

最初の評価点で増加率は異なる．

(5) 弾力性と単位
需要曲線: $Q = Q(P)$

パラメータ P が需要量 Q に与える影響を見たい．
$\Longrightarrow$ まず考えられるのは傾き dQ/dP．

異なる商品の需要関数で dQ/dP を比較できるか？

課題

(1) テキスト pp.220–227 を読む．

(2) 練習問題 8.1，1–5．但し下記のように問題文を修正．

- 問 1 (c) の問題文の始めに,「x が (b) のように変化する場合」を挿入．
- 問 1 (d) の問題文の最後に,「その理由も示しなさい.」を挿入．

2 全微分

$y = f(x)$ の時，微分 (differential) を用いて $dy = \frac{dy}{dx}dx$ と表すことが出来た．これと同じ考え方を用いれば，独立変数が 2 つ以上においても上と同様のことが出来る．

- ステップ 1．x_1，1 単位あたりの y の変化量を求める．____________
- ステップ 2．x_1 の微小変化 dx_1 による y の変化量は____________
- ステップ 3．y の全体としての変化は，x_1 と x_2 の変化からくる 2 つの要因の和である．

$$\Longrightarrow \quad dy = \underline{\hspace{6cm}}$$
$$= \underline{\hspace{6cm}}$$

この dy を全微分 (total differential) と呼び，dy を求める行為も全微分 (total differentiation) と呼ぶ.

ここでもし，x_2 が一定で変化しないのなら $dx_2 = 0$ で，

$$\begin{aligned} & dy = f_1 dx_1 \\ \leftrightarrow \quad & \left.\frac{dy}{dx_1}\right|_{x_2\text{一定}} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \end{aligned}$$

全微分の一般化.

$$\begin{aligned} y &= f(x_1,\ x_2,\ ,\ldots,\ x_n) \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n \\ &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i \end{aligned}$$

課題

(1) テキスト pp.228–231 を読む．偏微分を用いた弾力性については自習．

(2) 練習問題 8.2，1–4．

3 全微分の諸法則

前に学習した微分の諸法則と同じ.

①	$d(cu^n) = cnu^{n-1}du$	べき関数の法則
②	$d(u \pm v) = du \pm dv$	和・差の法則
③	$d(uv) = vdu + udv$	積の法則
④	$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$	商の法則

課題

(1) テキスト pp.231–233 を読む.

(2) 練習問題 8.3，1–3.

4 全導関数

全微分が出来れば，全ての変数が動くときの導関数，すなわち全導関数を求めることが出来る.
$y = f(x,\ w)$，ただし，$x = g(w)$

- ステップ 1．全微分する．

  $dy =$ ______________________________

- ステップ 2．導関数を求めるため両辺を dw で割り比率を求める．

  $\dfrac{dy}{dw} =$ ______________________________

応用. 以下で与えられるモデルにおいて u が y に与える効果を見たい.

$$y = f(x_1,\ x_2,\ u,\ v) \qquad \text{ただし,} \quad \begin{cases} x_1 = g(u,\ v) \\ x_2 = h(u,\ v) \end{cases}$$

- $\partial y / \partial u$？

  $\Longrightarrow$ x_1，x_2，v は固定．しかし，x_1 や x_2 は u に応じて変化し y に影響を与える．したがって，

  $$y = f(g(u,\ v),\ h(u,\ v),\ u,\ v)$$

  の式において，v を固定し u のみを動かし y への影響を見たい．すなわち，u に依存する x_1 や x_2 の変化も考慮したい．

  $\Longrightarrow$ 全微分し dy を求め，$dv = 0$ で評価してやればよい.（テキストでは全偏導関数と呼んでる.）

- ステップ 1: 全微分し，全ての変数を動かした時の効果を求める．

  $dy =$

- ステップ 2: 両辺を du で割って，$dv = 0$ で評価する．

  $$\left.\frac{dy}{du}\right|_{dv=0} =$$

課題

(1) この章の最初で提示したマクロ経済学の 45 度線モデル，

$$
\begin{aligned}
Y &= C + I_0 + G_0 \\
C &= C(Y,\ T_0)
\end{aligned}
$$

を用いて以下の問いに答えよ．

(a) 政府支出 G が均衡国民所得 $Y^* = Y(I_0,\ T_0,\ G_0)$ に与える影響（政府支出乗数）を求めなさい．

(b) 政府が均衡予算であるとは，政府の税収 T と財政支出 G が等しいということである．いま，政府が追加的に増やす財政支出 dG を均衡予算で行った場合の政府支出乗数（これを特に均衡予算乗数と呼ぶ）を求めなさい．

(c) 消費関数が $C = c(Y - T) + A$（ただし c と A は定数）で与えられる時，$\partial C/\partial Y$ と $\partial C/\partial T$ を求めなさい．また，この時の均衡予算乗数を求めなさい．

(2) テキスト pp.234–239 を読む．

(3) 練習問題 8.4，1–5．

5 陰関数の導関数

前節の課題に出てきたマクロ経済学の 45 度線モデルは，2 つの式をまとめた誘導形 (reduced form) で表した時，$Y = \cdots$ の形になっていた．しかし，IS モデル $I(r) + G = S(Y) + T$ の時には，$Y = \cdots$ の形にならない．この時，

$$
\left.\frac{dY}{dT}\right|_{dG=0} \qquad や \qquad \left.\frac{dY}{dG}\right|_{dT=0}
$$

はどのようにして求めるか？

$\Longrightarrow$ 全微分を用いるとこの導関数を求めることが出来る．

(1) 陰関数 (Implicit function)

$$
\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = 3x^4 \end{array}\right\} \quad y = \ldots \quad \text{の形に明示的 (explicit) に書き表した場合}
$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} y - 3x^4 = 0 \\ F(y,\ x) = 0 \end{array}\right\}$$

$y = \ldots$ 　のように，y と x の関係が明示的にではなく陰伏的 (implicit) に定義されている場合，この関数に隠れている $y = \cdots$ の関数を

$\Downarrow$

____________________ と呼ぶ．

- 上の関数 $y - 3x^4 = 0$ は，x に対して一意の y が決まるので，$y = f(x)$ という陰関数が存在する．
- 式によっては，$y = \ldots$ の形に解けない $F(y,\ x) = 0$ もある．明示的に $y = \ldots$ の形で書き表せないが，それでも x が与えられた時 y が一意に定まれば，$y = f(x)$ という陰関数が定義できる．

$\uparrow$

あくまで関数関係を示しただけで，陽関数の形に書き表せるとは限らない．

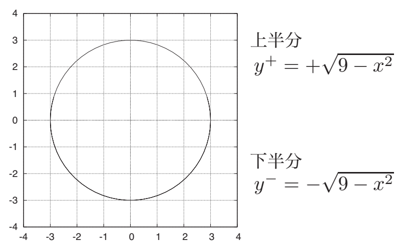
（例）マクロ経済学の IS モデルを表す式 $I(r) = S(Y)$ は，$Y = \ldots$ の形に明示的に書き表すことが出来ないが，r が与えられたら Y が一意に定まるとするなら，$Y = f(r)$ という陰関数が定義できる．

- 常に陰関数は存在するか？

$F(y,\ x) = x^2 + y^2 - 9 = 0$ を考える．

$$\leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 9$$
$$\leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

x が与えられると y は ±2 つの値をとる．したがって，$y = \ldots$ と明示的に書き表せるが，関数関係はない．



しかし，上半分，下半分に分けて考えれば，つまり，y がとりうる値の定義を正だけまたは負だけに限定すれば関数が定義できる．

故に，$F(y,\ x) = x^2 + y^2 - 9 = 0$ は，

$$\left.\begin{array}{lll} y > 0 & \text{で陰関数} & y = f(x) = +\sqrt{9 - x^2} \\ y < 0 & \text{で陰関数} & y = g(x) = -\sqrt{9 - x^2} \end{array}\right\}$$

が存在することになる．

- 陰関数が存在するには？

$F(y,\ x)=0$ を全微分すると $dF=0=$____________________

したがって，$F(y,\ x)=0$ が成立している点においては，

____

が成立している．もし，$F_y \neq 0$ が成立している点の近傍では，上の式より，x の微小変化に対応して y の微小変化が一意に定まることが分かる．

$$\Downarrow$$

$F_y \neq 0$ が成立している点の近傍では，x が与えられた時，$F(y,\ x)=0$ を満たす y を一意に定める関数関係 $y=f(x)$ が存在することになる．

陰関数定理 $F(y,\ x_1,\ \cdots,\ x_m)=0$ において，もし (a) 関数 F が連続的な偏導関数 F_y，F_1，$\cdots$，F_m をもっているならば，かつもし (b) 方程式 $F(y,\ x_1,\ \cdots,\ x_m)=0$ を満たす点 $(y_0,\ x_{10},\ \cdots,\ x_{m0})$ において F_y が非ゼロならば，$(x_{10},\ \cdots,\ x_{m0})$ の m-次元近傍 N が存在し，そしてその近傍 N では，y は $y=f(x_1,\ \cdots,\ x_m)$ の形で変数 $x_1,\ \cdots,\ x_m$ の陰伏的に定義された関数である．この陰関数は $y_0=f(x_{10},\ \cdots,\ x_{m0})$ を満たす．これはまた，近傍 N におけるすべての m 個のもとの組 $(x_1,\ \cdots,\ x_m)$ についても方程式 $F(y,\ x_1,\ \cdots,\ x_m)=0$ を満たすがゆえに，$F(y,\ x_1,\ \cdots,\ x_m)=0$ はその近傍において恒等式になる．その上，陰関数 f は連続的であり，かつ連続的な偏導関数 $f_1,\ \cdots,\ f_m$ をもつ．

（例）先ほどの円の式 $x^2+y^2-9=0$ で，

(a) $F_y=$__________，$F_x=$__________ でともに__________．

(b) F_y は__________ で $F_y \neq 0$.

したがって 2 点，____________ と____________ を除いた点の近傍で陰関数 $y=f(x)$ が定義できる．さらに，この関数 f は連続的で，かつ連続的な（偏）導関数 f_x が定義できる．

(2) 陰関数定理の幾何学的意味

$$dy = -\frac{F_x}{F_y}dx \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$F_y = 0$ とは，傾き $\frac{dy}{dx}$ が無限大，すなわち垂直になるということ.（前の円の問題で $F_y = 0$ の点における傾きを確認してみよう！）

(3) 陰関数定理に関する留意点

(a) $F_y \neq 0$ は陰関数が存在するための十分条件であり必要条件ではない.

(b) $F_y \neq 0$ により陰関数 f の存在が保証されたとしても，この定理は関数 f の形については何も語らないし，関数が定義される近傍の正確な大きさについても何も語らない.
$\Longrightarrow$ 例えば，円の式では下半円の y^- の近傍でしか陰関数は存在しない．y の近傍の範囲が上半円に及ぶと関数関係は存在しない.

(c) 以上の様な制約があるが，この定理は，条件が満たされれば陰関数 $y = f(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_m)$ の存在を保証し，それを用いた分析を意味あるものにしてくれる．さらに，y に関して明示的に解けなくても，偏導関数 $f_1,\, f_2,\, \cdots,\, f_m$ の存在を保証してくれる.

(4) 陰関数の導関数

- $F(y,\ x_1,\ \cdots,\ x_m)=0$ が $y=f(x_1,\ \cdots,\ x_m)$ と y で明示的に解ける場合.

  $\Longrightarrow$ 導関数は $\partial y/\partial x_1$ で求まる.

- $F(y,\ x_1,\ \cdots,\ x_m)=0$ が y について明示的に解けない場合.

  陰関数定理が成立するならば（$F_y \neq 0$ がならば），$\dfrac{\partial y}{\partial x_1}=f_i,\ (i=1,\cdots,m)$，が存在する.（$F_y \neq 0$ が全ての定義域で成立すれば，$\partial y/\partial x_i$ は常に求まる．それ以外では，$F_y \neq 0$ が成立する近傍においてのみ $\partial y/\partial x_i$ を求めることが出来る.）

$$\text{左辺} = \text{右辺} \qquad \Longleftrightarrow \qquad d\,\text{左辺} = d\,\text{右辺}$$

$$\begin{aligned}
& dF(y,\ x_1,\ \cdots,\ x_m) = d0 = 0 \\
\longleftrightarrow\quad & F_y dy + F_1 dx_1 + \cdots + F_m dx_m = 0 \\
\longleftrightarrow\quad & F_y \frac{dy}{dx_1} + F_1 \frac{dx_1}{dx_1} + F_2 \frac{dx_2}{dx_1} + \cdots + F_m \frac{dx_m}{dx_1} = 0 \\
\longleftrightarrow\quad & F_y \frac{dy}{dx_1} + F_1 + F_2 \frac{dx_2}{dx_1} + \cdots + F_m \frac{dx_m}{dx_1} = 0
\end{aligned}$$

ここでもし，$dx_2 = dx_3 = \cdots = dx_m = 0$ とするなら，すなわち，y と x_1 以外の変数は動かず一定とするなら，

$$F_y \left.\frac{dy}{dx_1}\right|_{\text{他の変数一定}} + F_1 = 0$$

$$\longleftrightarrow \qquad \left.\frac{dy}{dx_1}\right|_{\text{他の変数一定}} \equiv \frac{\partial y}{\partial x_1} = \underline{\hspace{6cm}}$$

同様に他の変数に関する偏導関数も次のように求まる.

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \underline{\hspace{6cm}} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

もし，2 変数しかなく $F(y,x)=0$ なら，$\underline{\hspace{7cm}}$

（例 1）$F(y,\ x) = y - 3x^4 = 0$ が定義する陰関数の dy/dx を求めよ．

（例 2）方程式 $F(Q,\ K,\ L) = 0$ で陰関数定理が大域的に適用出来，陰伏的に生産関数 $Q = f(K,\ L)$ が定義出来ると仮定しよう．このとき，資本ストック K の限界生産性 $MPK \equiv \partial Q/\partial K$，および，労働 L の限界生産性 $MPL \equiv \partial Q/\partial L$ を，F を用いて表せ．また，$F(Q,\ K,\ L) = 0$ から求まるもう一つの偏導関数 $\partial K/\partial L = -F_L/F_K$ の経済学的意味を説明せよ．

(5) 連立方程式の場合への拡張

$$
\begin{aligned}
&F^1(y_1,\ \cdots,\ y_n,\ x_1,\ \cdots,\ x_m) = 0 \\
&F^2(y_1,\ \cdots,\ y_n,\ x_1,\ \cdots,\ x_m) = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&F^n(y_1,\ \cdots,\ y_n,\ x_1,\ \cdots,\ x_m) = 0
\end{aligned}
$$

を同時に満たすような $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad (i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, m)$ は？

(a) 両辺を全微分

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F^1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial F^1}{\partial y_2}dy_2 + \cdots + \frac{\partial F^1}{\partial y_n}dy_n = -\left(\frac{\partial F^1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F^1}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial F^1}{\partial x_m}dx_m\right) \\
&\frac{\partial F^2}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial F^2}{\partial y_2}dy_2 + \cdots + \frac{\partial F^2}{\partial y_n}dy_n = -\left(\frac{\partial F^2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F^2}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial F^2}{\partial x_m}dx_m\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\partial F^n}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial F^n}{\partial y_2}dy_2 + \cdots + \frac{\partial F^n}{\partial y_n}dy_n = -\left(\frac{\partial F^n}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F^n}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial F^n}{\partial x_m}dx_m\right)
\end{aligned}
$$

(b) 今，x_1 が変化した時，$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ が何単位変化するかを知りたいとする．したがって，x のうち x_1 以外は一定にして

$$
\left.\frac{dy_i}{dx_1}\right|_{x_2,\cdots,x_m\text{一定}} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1}
$$

を求めればよい．

$\Longrightarrow$ 上で求めた式の両辺を dx_1 で割り，x_1 以外の x を一定とおくと以下を得る．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F^1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F^1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F^1}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1} = -\frac{\partial F^1}{\partial x_1} \\
&\frac{\partial F^2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F^2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F^2}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1} = -\frac{\partial F^2}{\partial x_1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\partial F^n}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F^n}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F^n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1} = -\frac{\partial F^n}{\partial x_1}
\end{aligned}
$$

(c) 上の式を行列で書き直す．

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F^2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F^n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F^n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial F^1}{\partial x_1} \\ -\dfrac{\partial F^2}{\partial x_1} \\ \vdots \\ -\dfrac{\partial F^n}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

一階の微分を集めた上の係数行列は，第 7 章で出てきたヤコビ行列と同じ．この係数行列の行列式，すなわちヤコビアン $|J|$ は，陰関数定理の下では，$|J| \neq 0$ が成り立つ．なぜなら，

$$\frac{\partial F^i}{\partial y_j} \neq 0 \qquad (i = 1, \cdots, n\ j = 1, \cdots, n)$$

(d) クラメールの公式 (Cramer's rule) より

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1} = \frac{|J_i|}{|J|} \qquad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

(6) 考察

(a) 上で求めた $\partial y_i/\partial x_1$ は，全ての方程式体系を同時に満たしつつ，x_1 を動かした時，y_i がどれだけ変化するかを表す．

(b) $F^i(\quad) = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$ の全ての式で陰関数定理が成立していなくても，すなわち，何個か $\partial F^i/\partial y_j = 0$ であっても，$|J| \neq 0$ であれば，上の方程式体系における解 $\partial y_i/\partial x_1$ が求まる．これは，1 つの式だけが大切なのではなく，あくまでも方程式体系全体を考慮しての $\partial y_i/\partial x_1$ だからである．

6 問題演習

45 度線モデル（マクロ経済学）

$$\begin{cases} Y = C + I + G \\ C = c(Y - T) + A \\ T = tY + T_0 \end{cases} \tag{1}$$

内生変数: $Y,\ C,\ T$
外生変数: $I,\ G,\ A,\ T_0,\ c,\ t$

$$\begin{aligned} Y^* &= f^1(I, G, A, T_0, c, t) \\ C^* &= f^2(I, G, A, T_0, c, t) \\ T^* &= f^3(I, G, A, T_0, c, t) \end{aligned}$$

(1) 投資乗数 $\partial Y^*/\partial I$ を求めよ.

解法 1 陰関数 $f^1(\cdot)$ を用いる.

$$\frac{\partial Y^*}{\partial I} = \frac{\partial f^1}{\partial I}$$

陰関数 $f^1(\cdot)$ は第 (1) 式の連立方程式体系が全て成立している状態で__________ について解いたものである.

解法 2 $Y^* = \cdots$ の形で解かずに $\partial Y^*/\partial I$ を求める.
第 (1) 式を $F(\cdot) = 0$ の形に書き換える.

$$\begin{cases} Y - C - I - G = 0 \\ C - c(Y - T) - A = 0 \\ T - tY - T_0 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

上の式をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
F^1(Y, C, T, I, G, A, T_0, c, t) = 0 \\
F^2(Y, C, T, I, G, A, T_0, c, t) = 0 \\
F^3(Y, C, T, I, G, A, T_0, c, t) = 0
\end{aligned}
$$

とおく．求めたい $\partial Y^*/\partial I$ は，I 以外の外生変数を一定とした時，I の変化により内生変数の均衡値 Y^*, C^*, T^* が全て変化したときの Y^* への効果を表している．したがって，上の式の両辺を全微分し，I 以外の外生変数を一定とおけばよい．

ここから，クラメールの公式を用いて所望の解を得る．

$$\frac{\partial Y}{\partial I} =$$

課題

(1) テキスト pp.240–252 を読む．

(2) 練習問題 8.5 (p.252)，1–7．問 6 の「非同次」とは，(8.23)′ 式の右辺の 1 つ以上が非ゼロということ（右辺がすべてゼロにはならないということ）．

7 一般関数型モデルの比較静学

- 関数の形が明示的に与えられていない時，どのようにして比較静学を行うか？
- 関数の形が明示的に与えられている場合は，調べたい変数について解いて，微分または偏微分すればよい．一般形の場合には，明示的に解けないので陰関数定理を用いて全微分し偏導関数を求めればよい．

1 財市場モデル

$$
\begin{aligned}
&Q_d = Q_s && \text{関数は全て連続} \\
&Q_d = D(P,\ Y_0) && \text{where } \frac{\partial D}{\partial P} < 0,\ \frac{\partial D}{\partial Y_0} > 0 \\
&Q_s = S(P) && \text{where } \frac{dS}{dP} > 0
\end{aligned}
$$

- Y_0 は外生変数．比較静学は，外生的ショックに対する均衡の変化を調べるもの．
- 内生変数は，Q_d, Q_s, P の 3 つ．方程式も 3 本．したがって，3 本の式が独立なら解ける．
- 上の方程式を解いて得られる均衡水準をそれぞれ，Q_d^*, Q_s^*, P^* とおく．

- 比較静学，________________________ を調べることが出来る．

<u>アプローチ 1</u>[1]

行列を用いる方法．このアプローチは次元が大きくても使える．

$F^1(Q_d, Q_s, P, Y_0) =$

$F^2(Q_d, Q_s, P, Y_0) =$

$F^3(Q_d, Q_s, P, Y_0) =$

[1] テキストの連立方程式によるアプローチに対応．ただし，テキストでは，$Q_d = Q_s = Q$ とおいて次元を減らしている．

上の 3 式が Q_d，Q_s，P で解けるか陰関数定理を使って確認.

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial Q_d} & \dfrac{\partial F^1}{\partial Q_s} & \dfrac{\partial F^1}{\partial P} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial Q_d} & \dfrac{\partial F^2}{\partial Q_s} & \dfrac{\partial F^2}{\partial P} \\ \dfrac{\partial F^3}{\partial Q_d} & \dfrac{\partial F^3}{\partial Q_s} & \dfrac{\partial F^3}{\partial P} \end{vmatrix} =$$

したがって，陰関数と______________________________ が存在する.

均衡での導関数を求めるために，全微分する.（この全微分した式の係数行列がヤコビ行列なので，実際に問題を解く際は全微分してからヤコビ行列を作り，陰関数の存在を確認する方が効率的.）

両辺を dY_0 で割り導関数を作る.

導出したい導関数________________________ を左辺にまとめて行列表示にする．

クラメールの公式 (Cramer's rule) を用いて以下を得る．

$$\frac{dQ_d}{dY_0} =$$

$$\frac{dQ_s}{dY_0} =$$

$$\frac{dP}{dY_0} =$$

アプローチ 2

連立方程式を 1 本の式に reduce する方法．しかし，この方法は 1 本に reduce できないような複雑な体系では使えない．

$$\begin{cases} Q_d = Q_s \\ Q_d = D(P, Y_0) \\ Q_s = S(P) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\leftrightarrow \quad \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

もし，この式から内生変数について解くことが出来，すなわち，$P = P(Y_0)$ という陰関数が存在すれば，dP/dY_0 を得ることが出来る．

$F(P, Y_0) =$____________________ を陰関数定理を用いて調べる．

(1) $F(\cdot)$ は P と Y_o に関して連続的な導関数を持つ．（$D(\cdot)$ と $S(\cdot)$ の仮定より）

(2) $F_P =$ ______________________________ でゼロではない．

故に陰関数____________ が存在し，さらに $\frac{dP}{dY_0}$ も存在する．

dP/dY_0 を求める

dQ_d/dY_0，dQ_s/dY_0 を求める

課題

(1) テキスト pp.252–265 を読む．

(2) 練習問題 8.6 (p.264)，1–4．
問題 1 のヒント．このモデルは供給量 Q_s が S_0 で一定であるから，この市場の需給を表すグラフは，供給曲線が垂直で需要曲線が右下がり（$\partial D/\partial P < 0$）に描かれる．一方，パラメータ t_0 は需要に正の影響をおよぼすため，ミクロ経済学のテキストに出てくる所得と似た役割を表す．t_0 を所得に読み替えると，所得が上昇すると需要量が増大し需要曲線が右に平行シフトすると解釈出来る．この点を理解すると，計算結果が正しいかをグラフを用いてチェックすることが出来る．

8 比較静学の限界

- 比較静学の有用性
  パラメータの値が，モデルの均衡状態を維持する水準からそれた場合，均衡にどのような影響を与えるかを見ることが出来る．

- 比較静学の限界
  パラメータの変化前と後による 2 つの均衡を比較するだけで，どのような調整過程を経て新しい均衡に到達するかは議論できない．さらに，旧均衡点からそれた場合，均衡が不安定で新均衡点に到達できない可能性があることもチェックできない．
  $\Longrightarrow$ 経済動学の分野