第 7 章 微分法とその比較静学への応用

市東 亘
shito@seinan-gu.ac.jp

2020 年 5 月 26 日

本章の目的

- 様々な関数の微分方法を学ぶ.
- 偏微分を学ぶ.
- 経済モデルに微分を適用し簡単な比較静学を行えるようになる.
- ヤコビ行列式を用いて，非線形関数の従属関係を調べられるようになる.

1　1 変数の関数についての微分法

(1) ベキ関数の微分法

$$y = f(x) = cx^n$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = cnx^{n-1}$$

(2) 練習問題

(a) 以下の導関数を求めよ.
$y = x^{19} \qquad w = 3u^{-1}$

(b) 以下を求めよ.
$\frac{d}{dx}(-x^{-4})$

(3) 定値関数の微分法

$$y = f(x) = k$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

課題

(1) テキスト pp.182–187 を読む．

(2) 練習問題 7.1，1–3.

2　同一の変数が複数の関数に見られる場合の微分法

(1) 和と差の場合

$$y = 3x^2 + 9x^{12}$$

$$\leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{6cm}}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$$

(2) 積の場合

$y = (2x + 3)(3x^2)$ のようなケース．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= f(x)\frac{dg(x)}{dx} + \frac{df(x)}{dx}g(x) \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(2x + 3)(3x^2) =$$

同様に，

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

※テキストを読むためのヒント．(pp.192–195)

$$\text{収入（Revenue）} = R = PQ$$

$$\text{平均収入} = AR = \frac{R}{Q}$$

$$\text{限界収入} = MR = \frac{dR}{dQ}$$

(3) 商の場合

$$\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x}{x^2+1}\right) =$$

課題

(1) テキスト pp.187–198 を読む．

(2) 練習問題 7.2，1–8.

3 異なった変数の関数についての微分法

(1) The Chain Rule（鎖の法則）

$z = f(y)$，$y = g(x)$ の時，即ち，$z = f(g(x))$ の時，

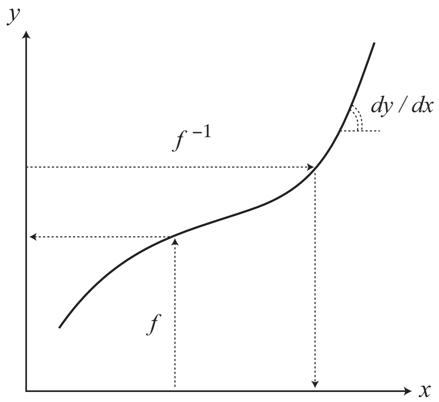
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(y)g'(x)$$

$$dx \quad \xrightarrow{g} \quad dy \quad \xrightarrow{f} \quad dz$$

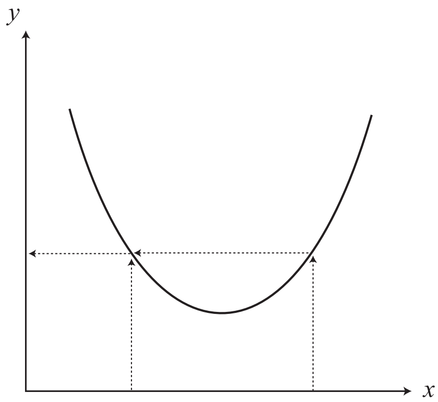
(2) 逆関数法

- $y = f(x)$ が 1 対 1 対応なら，関数 f の逆関数を作ることが出来る．
- $y = f(x)$ の逆関数: $x = f^{-1}(y)$ で表される．これは，$1/f$ ではない！
- 1 対 1 対応の関数 $\Longleftrightarrow$ 単調関数

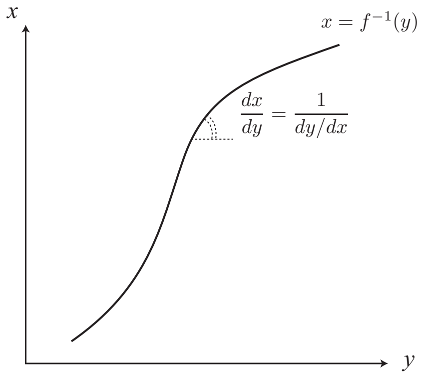
$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \quad \text{単調増加関数}$$
$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2) \quad \text{単調減少関数}$$



1 対 1



1 対 1 でない



逆関数

関数 $y = f(x)$ が与えられている時，逆関数 $x = f^{-1}(y)$ の導関数は，逆関数を求めずに dy/dx の逆数をとることによって直接求めることが出来る．

$$x = f^{-1}(y)$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

問題: $y = x^{1/3}$ を y で微分せよ．

課題

(1) テキスト pp.199–204 を読む．

(2) 練習問題 7.3，1–6．

4 偏微分 (partial derivative)

今までの微分ではパラメータが 1 つしかなかった．経済モデルでは，各内生変数の均衡値は 1 つ以上のパラメータの関数と考えられる．ここでは，関数に変数が 2 つ以上存在する場合の導関数の求め方を学ぶ.

(1) 偏導関数

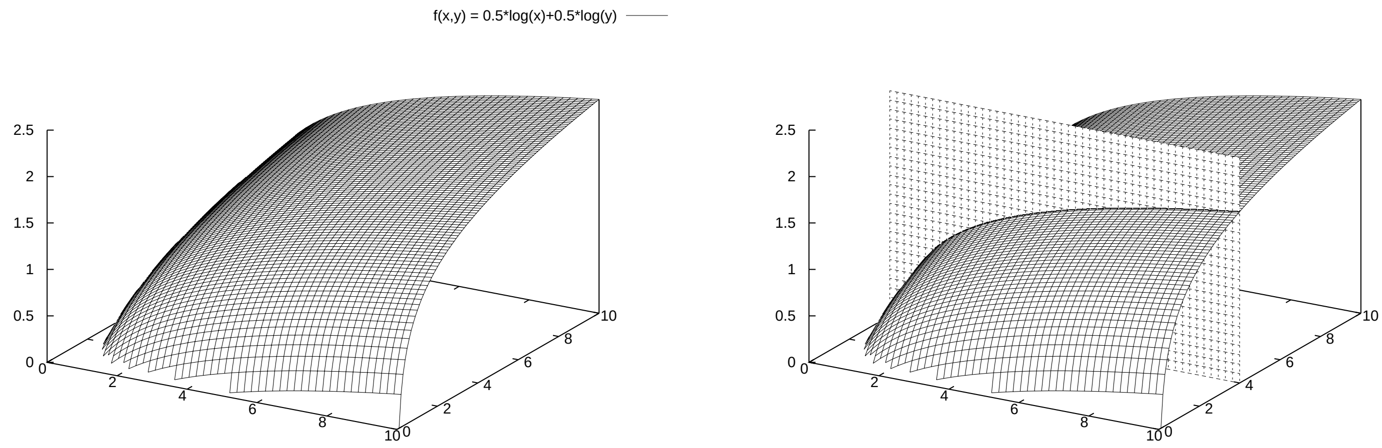
$y = f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n)$

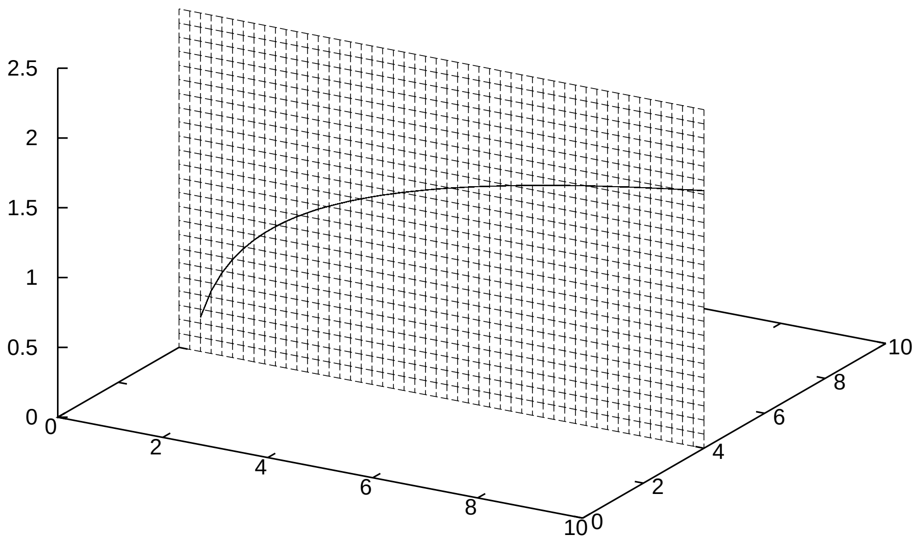
変数 x_1 が Δx_1 だけ変化した場合の差分係数

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n) - f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)}{\Delta x_1}$$

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_1} \equiv \underline{\hspace{5cm}}$$

(2) 幾何学的説明





(3) 偏微分の求め方
微分しない変数は定数項として計算
$y = f(x_1,\ x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \equiv f_1 = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} \equiv f_2 = \underline{\hspace{4cm}}$$

課題

(1) テキスト pp.204–209 を読む.

(2) 練習問題 7.4，1–4.（限界効用は効用 u を微分したもの）

5 比較静学への応用

(1) 市場モデル（ミクロ経済学）

$$Q_d = a - bP \qquad (a,\ b > 0) \qquad \text{（需要関数）}$$
$$Q_s = -c + dP \qquad (c,\ d > 0) \qquad \text{（供給関数）}$$
$$Q_d = Q_s \qquad \text{（市場均衡条件）}$$

比較静学は外生的変化に対する均衡の変化を見るため，まずは均衡解を求めなければならない．

$$\bar{Q} = Q(a,b,c,d) = \underline{\hspace{6cm}}$$

$$\bar{P} = P(a,b,c,d) = \underline{\hspace{6cm}}$$

あとは，$\partial\bar{P}/\partial a$ や $\partial\bar{Q}/\partial b$ で外生的変化に対する均衡の変化を見ることが出来る．

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial a} = \underline{\hspace{6cm}}$$

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial b} = \underline{\hspace{6cm}}$$

(2) 45 度線モデル（マクロ経済学）

$$\begin{aligned} &Y = C + I_0 + G_0 && \text{（財市場均衡条件）} \\ &C = \alpha + \beta(Y - T) && \text{（家計の消費関数）} \\ &T = \gamma + \delta Y && \text{（所得税）} \\ &0 < \beta,\ \delta < 1 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{Y} = \underline{\hspace{7cm}}$$

$$= \underline{\hspace{7cm}}$$

$$\bar{C} = \underline{\hspace{7cm}}$$

$$= \underline{\hspace{7cm}}$$

$$\bar{T} = \underline{\hspace{7cm}}$$

$$= \underline{\hspace{7cm}}$$

上の均衡値を外生変数で偏微分することにより，比較静学を行える．

- 財政支出乗数 $\underline{\hspace{7cm}}$

- 投資乗数 ____________________

- 租税（定額税）乗数 ____________________

課題

(1) テキスト pp.209–214 を読む.

(2) 練習問題 7.5，1–2.

(3) 上の 45 度線モデルで所得税率が上昇した時の消費と所得の効果を分析せよ.（全ての内生変数の変化を問うている.）

6 ヤコビ行列式 (Jacobian)

偏導関数は，関数の従属関係を調べるのに役立つ.

$$\Downarrow$$

線型従属は係数行列の行列式 $|A|$ で調べられた．非線形的な従属関係や，非線形関数については偏導関数を用いて調べることが出来る.

① $Y_1 = 2x_1 + 3x_2$
② $Y_2 = 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2$

②式は①式を 2 乗しただけ．②式は非線形で行列に表せない．したがって，$|A| = 0$ を用いた従属性の判定は出来ない．また，$|A| = 0$ では 1 次結合による 1 次従属しかチェックできず，上の例のような 2 乗の従属性はチェックできない.

ここでヤコビ行列式（Jacobian）を以下のように定義.

$$|J| \equiv \left|\frac{\partial(y_1,\ y_2)}{\partial(x_1,\ x_2)}\right| \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

= ____________________

$|J| = 0$ なら関数は従属関係.

※ここでは，従属関係が非線形であるにもかかわらずチェックできることに注意！

より一般的に，

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f^1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) & &f^i \text{ は線型である必要なし.}\\
y_2 &= f^2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) & &f^i \text{ は } i \text{ 番目の式の意で}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & &i \text{ 乗ではない.}\\
y_n &= f^n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)
\end{aligned}
$$

$$
|J| \equiv \left|\frac{\partial(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)}{\partial(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)}\right| \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{で独立.}
$$

第 4 章の線型連立方程式体系，

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & d_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & d_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & d_m
\end{array}
$$

において，Jacobian を構築すると $|A|$ になるため，$|A| = 0$ を用いて式の従属関係をチェックしたのは，Jacobian の特殊ケースであったことが分かる．

課題

(1) テキスト pp.216–219 を読む．

(2) 練習問題 7.6，1．