

第5章 線型モデルと行列代数 II

市東 亘

shito@seinan-gu.ac.jp

2021年5月7日

復習

- 線型方程式体系は、たとえそれがいかに大きくても簡潔な行列記号で書き表されることを学んだ。
- 方程式体系は、もし逆行列が存在するならば、係数行列の逆行列を用いて解くことが出来ることを学んだ。

本章の目的

- 逆行列の存在をどのようにして確かめるか、その方法を学ぶ。
- 逆行列の導出方法を学ぶ。

1 行列の非特異性のための条件

(1) 非特異性のための条件

必要条件 正方行列

必要十分条件 正方行列かつ行が1次独立. (列が1次独立でも同じ)

行列が非特異 \iff 正方行列かつ行が1次独立

↑

この条件の意味を考える。

行列が非特異なら逆行列が存在し、逆行列を用いて方程式の解を求めることが出来る前章で学んだ。

方程式体系が一意的解を持つには

(a) 方程式の数と未知数の数が一致していないといけない \iff _____

(b) 各方程式は互いに整合的かつ関数的に独立. (第3章講義ノート P.5 参照)

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

i. $d_1 = 2d_2$ なら2つの式は_____だが_____ではなく事実上_____

例えば, $d_1 = 12$, $d_2 = 6$ で $10x_1 + 4x_2 = 12$ は_____の解を持つ.

ii. $d_1 \neq 2d_2$ なら2つの式は_____.

例えば $10x_1 + 4x_2 = 12$ と $5x_1 + 2x_2 = 0$ は同時に成立しない.
なぜか?

まとめ

- 式の整合性 \iff _____ から構成されるベクトルの
_____ によって _____
が表せるということ.

- 関数的独立性 \iff _____ から構成されるベクトルが
 _____ になり, そのベクトルを基底に
 _____ を指す一意の到達経路がある
 (平行四辺形がただ1つ作れる) ということ.
 ↓
 この時, 逆行列が存在し, 一意の解が得られる.

(2) 行列の階数 (rank)

階数: 1次独立な行(または列)の最大の数

非特異行列 \iff _____**課題**

- (1) テキスト pp.105-110 を読む.
- (2) 練習問題 5.1 全部.

2 行列式 (determinant) による非特異性の判定

逆行列を用いれば連立方程式の解を求めることができた. 逆行列が存在するためには, 非特異行列(正方行列かつ全ての行が1次独立)であればよかった. ある行列が非特異かどうかを調べるには, 行列式 (determinant) を用いればよい.

(1) 行列式と非特異性

正方行列 A の行列式は $|A|$ で表され, _____

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad |A| = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad |B| = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad |C| = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad |D| = \underline{\hspace{2cm}}$$

1次従属の場合, 行列式は必ず _____ になる.

(2) 行列式の幾何学的意味

(3) 3 次の行列式の計算

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(a) サラスの法則を用いる場合

※ この方法は簡便だが、3 次以下の行列式を求める場合にしか適用できない。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(b) ラプラス展開 (Laplace expansion) を用いる場合

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Cofactor (余因子) は, minor に適切な符号を付けたもの.

$$|C_{ij}| \equiv \underline{\hspace{15em}}$$

$$|C_{11}| = \underline{\hspace{15em}}$$

$$|C_{12}| = \underline{\hspace{15em}}$$

$$|C_{13}| = \underline{\hspace{15em}}$$

まとめ

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\ &= a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}| \\ &= \sum_{j=1}^3 a_{1j}|C_{1j}| \end{aligned}$$

ここでは, 第1行の要素をもとに展開したが, これは, 任意の行 or 列で展開することが出来る.

練習問題: 以下を展開して求めよ.

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

(4) 3 次の行列式の幾何学的意味.

(5) n 次の行列式の計算

サラスの法則は3次の行列式までしか使えないが、ラプラス展開は、高次の行列式にも使える。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

(6) n 次の行列式の幾何学的意味

2次元, 3次元で得られた結果をそのまま拡張すれば, n 個のベクトルが作る _____
 _____ に等しいという解釈が出来る。そして, 1次従属なベクトルが含ま
 れていると, その _____ が _____ になることが予想される。

課題

- (1) テキスト pp.110-116 を読む。
- (2) 練習問題 5.2 1-4.

3 行列式の基本的諸性質

(1) 性質 I

行と列との交換は行列式の値に影響を与えない. $|A| = |A'|$

⇒ 幾何学的には行ベクトル, 列ベクトルいずれのベクトルで構成される _____
も同じになるということ.

⇒ ラプラス展開で _____ で展開しても _____ で展開しても同じ値を得る.

(2) 性質 III

任意の l つの行 (あるいは l つの列) をスカラー k 倍すれば, 行列式の値は k 倍になる.

⇒ 幾何学的には, 1つのベクトルの座標を全て k 倍すると, ベクトルで構成される
_____ も k 倍になるということ.

⇒ 行や列で共通項 k でくくることによって, 計算が簡略化される.

$$\begin{vmatrix} 28 & 63 & 21 \\ 32 & 53 & 17 \\ 4 & 23 & 9 \end{vmatrix} =$$

(3) 性質 IV

任意の行を何倍かしたものを他の行に加えても（から引いても）行列式の値は変わらない.
この性質は列に関しても同様.

$$7 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 8 & 53 & 17 \\ 1 & 23 & 9 \end{vmatrix} =$$

(4) 性質 V

ある行（または列）が他の行（または列）倍数ならば，行列式の値はゼロである．もちろん，
2つの行（または列）同じならば，行列式の値はゼロになる．

この性質は，性質 IV から導かれるが，幾何学的にも明らか．すなわち，行または列が作る
ベクトルが同じ方向を向いており，_____ がつぶれている状態を表している．

⇒ _____

(5) 行列式の非特異性の判定

A が $n \times n$ 行列で， $Ax = d$ が与えられた時，

$$|A| \neq 0 \iff \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\iff \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\iff \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\iff \underline{\hspace{10cm}}$$

課題

- (1) テキスト pp.117-122 を読む.
- (2) 練習問題 5.3 1-6.

4 逆行列の求め方

$$\left. \begin{array}{l} Ax = d \\ \Leftrightarrow \bar{x} = A^{-1}d \quad (A \text{ が非特異なら}) \end{array} \right\} \text{逆行列 } A^{-1} \text{ をどのように求めるか?}$$

- (1) 他要素の余因子による行列式の展開

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

第1行の要素と第2行の要素の余因子とで展開する.

$$\sum_{j=1}^3 a_{1j}|C_{2j}| = a_{11}|C_{21}| + a_{12}|C_{22}| + a_{13}|C_{23}|$$

=

性質 VI 他要素の余因子（「異なった」行または列の余因子）によって行列式を展開すれば常に0になる.

なぜゼロになるのか？

上の展開は $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ に等しい. つまり, 必ず1次従属になる.

$$\text{故に, } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}|C_{i'j}| = 0 \quad (i \neq i') & i \text{ 番目の行と } i' \text{ 番目の行} \\ \sum_{i=1}^n a_{ij}|C_{ij'}| = 0 \quad (j \neq j') & j \text{ 番目の列と } j' \text{ 番目の列} \end{cases}$$

(2) 逆行列の構築手順

(a) 与えられた行列が非特異かどうか調べる.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

なら _____ で非特異 \implies _____(b) 余因子行列 $C = (|C_{ij}|)$ を作る.

$$C = \begin{pmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & \dots & |C_{1n}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & \dots & |C_{2n}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ |C_{n1}| & |C_{n2}| & \dots & |C_{nn}| \end{pmatrix}$$

(c) 余因子行列を転置させる. ($\text{adj } A$) the adjoint of A

$$C' \equiv \text{adj } A \equiv$$

(d) AC' を求める.

$$AC' =$$

(e) 上の結果より,

$$AC' = |A|I$$

故に $A^{-1} = \underline{\hspace{10em}}$

練習問題: 上の手順で行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

課題

(1) テキスト pp.123–127 を読む.

(2) 練習問題 5.4 1–3.

問題 1 の日本語訳がおかしいので, 原文を載せておきます.

Suppose that we expand a fourth-order determinant by its *third column* and the cofactors of the *second-column* elements. How would you write the resulting sum of products in \sum notation? What will be the sum of products in \sum notation if we expand it by the *second row* and the cofactors of the *fourth-row* elements?

5 クラメールの公式 (Cramer's rule)

(1) クラメールの公式の導出

$A_{n \times n} x = d$ の解 _____

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & \dots & |C_{n1}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & \dots & |C_{n2}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ |C_{1n}| & |C_{2n}| & \dots & |C_{nn}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n d_i |C_{i1}| \\ \sum_{i=1}^n d_i |C_{i2}| \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n d_i |C_{in}| \end{pmatrix}$$

上の第1行に着目すると, $\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n d_i |C_{i1}|}{|A|}$. $|A|$ の第1列のラプラス展開は _____

$|A|$ の第1列を d_i で置き換えたものを $|A_1|$ とおくと, $|A_1| =$ _____ . したがっ

て, $\bar{x}_1 =$ _____

同様に,

$$\bar{x}_j =$$

練習問題: 以下の連立方程式を Cramer's rule を使って解きなさい。次に逆行列を用いて解いて検算しなさい。

$$5x_1 + 3x_2 = 30$$

$$6x_1 - 2x_2 = 8$$

課題

- (1) テキスト pp.127-133 を読む. 第 5.6 節は自習.
- (2) 練習問題 5.5 の 1-3.
- (3) 練習問題 5.7 の 1.
- (4) p.56, (3.12) 式で与えられる 2 財ミクロ経済モデルを変数を減らさずに行列を用いて解く.

6 静学分析の限界

モデルの内生変数の均衡値を求めるという静学均衡の議論.

⇒ 均衡状態に到達する変数の調整過程や, 再調整の過程を無視. 最終的な到達点のみ問題にしてきた.

- 均衡点にのみ注目 = _____

外生的な変化に反応して新しい均衡はどうなるのか? 新しい均衡への調整過程は無視し, 新しい到達点がどこかを見る.

⇒ _____

- 調整過程や, 均衡の到達可能性 (均衡の安定性) を議論 = _____

均衡への到達過程 (調整過程) において, 外生的な変化が生じた場合, 到達経路がどう変化するか?

⇒ _____

課題

- (1) テキスト pp.144-145 を読む.